Дифференцируемость функции. Основные понятия

Понятие дифференцируемости.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке (a, b); точка $x_0 \in (a, b)$; число Δx достаточно мало, так что $x_0 + \Delta x \in (a, b)$.

Определение 1. ***Приращением функции*** *$y = f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, называется число $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.*

Утверждение 1. *Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.*

Доказательство. По определению функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$, что равносильно $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$. $\square$

Определение 2. *Число $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (при условии, что этот предел существует) называется* ***производной*** *функции $y = f(x)$ в точке x_0.*

Обозначения: $f'(x_0)$, $f'(x)|_{x=x_0}$, $y'(x_0)$, $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Определение 3. ***Правой (левой) производной*** *функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется число $f'_{\Pi} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\left(f'_{\Lambda} = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)$.*

Утверждение 2. *Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда $f'_{\Pi}(x_0) = f'_{\Lambda}(x_0) (= f'(x_0))$.*

Пример 1. *Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$. Вычислим ее левую и правую производную в точке $x_0 = 0$:*

$$f'_{\Pi}(0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

$$f'_{\Lambda}(0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Видим, что $f'_{\Pi}(0) \neq f'_{\Lambda}(0)$, следовательно, $f'(0)$ не существует.

Геометрический смысл производной.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Отметим на нем точки $M(x_0, f(x_0))$ и $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Прямая MN называется секущей графика функции $f(x)$. Зафиксируем точку M. Тогда угол между секущей MN и осью Ox зависит только от Δx. Обозначим его $\varphi(\Delta x)$.

Определение 4. ***Касательной*** *к графику функции $y = f(x)$ в точке M называется предельное положение секущей MN при стремлении точки N к точке M (то есть при стремлении приращения Δx к нулю).*

Угол $\varphi(\Delta x)$ при этом стремится к некоторому углу φ_0, который называется ***углом наклона касательной*** *к оси Ox.*

Теорема 1. *Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то в точке $M(x_0, f(x_0))$ существует касательная к графику $f(x)$, причем $\operatorname{tg}\varphi_0 = f'(x_0)$, где φ_0 — угол между касательной и положительным направлением оси Ox, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi_0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.*

Доказательство. Обозначим через H точку с координатами $H(x_0 + \Delta x, f(x_0))$. Тогда $\angle NMH = \varphi(\Delta x)$, $\operatorname{tg}\angle NMH = \dfrac{NH}{MH} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Следовательно, $\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg}\lim_{x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg} f'(x_0) = \varphi_0.$$

□

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Определение 5. *Функция $y = f(x)$ называется* ***дифференцируемой*** *в точке x_0, если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде:*

$$\Delta y = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x), \quad \Delta x \to 0$$

или

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Здесь A — некоторая постоянная, не зависящая от Δx.

Теорема 2. *Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную $f'(x_0)$. При этом постоянная A в определении дифференцируемости равна $f'(x_0)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, следовательно, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(A + \alpha(\Delta x)) = A$.

Достаточность. Пусть существует $f'(x_0)$. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \bar{o}(1)$, $\Delta x \to 0$. Значит, $\Delta y = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$, где $A = f'(x_0)$. □

Теорема 3. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Так как $\Delta y = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x\to 0} \bar{o}(\Delta x) = A\cdot 0 + 0 = 0.$$

$\square$

Замечание 1. *Обратное, вообще говоря, неверно. Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна, но не дифференцируема в точке $x = 0$.*

Теорема 4. (Производная сложной функции). *Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $y = f(x(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем*

$$(f(\varphi(t))'\Big|_{t=t_0} = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0).$$

Доказательство. Выберем приращение $\Delta t \neq 0$. Тогда соответствующее ему приращение функции $x = \varphi(t)$ представляется в виде: $\Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)$. Приращение функции $y = f(x)$, соответствующее приращению Δx, имеет вид: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Получаем, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(x_0)\frac{\varphi'(t_0)\Delta t + \beta(\Delta t)\Delta t}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\frac{\varphi'(t_0)\Delta t + \beta(\Delta t)\Delta t}{\Delta t} =$$

$$= f'(x_0)\varphi'(t_0) + f'(x_0)\beta(\Delta t) + \varphi'(t_0)\alpha(\Delta x) + \varphi'(t_0)\beta(\Delta t)\alpha(\Delta x) = f'(x_0)\varphi'(t_0) + \bar{o}(1), \quad \Delta t \to 0.$$

Здесь $\beta(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$ в силу дифференцируемости функции $x = \varphi(t)$ в точке t_0; поскольку из дифференцируемости функции следует ее непрерывность, то можно утверждать, что $\Delta x \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Значит, действительно выражение $f'(x_0)\beta(\Delta t) + \varphi'(t_0)\alpha(\Delta x) + \varphi'(t_0)\beta(\Delta t)\alpha(\Delta x) = \bar{o}(1)$ при $\Delta t \to 0$. Отсюда следует, что сложная функция $y = f(x(t))$ дифференцируема в точке t_0 и ее производная $(f(\varphi(t))'\Big|_{t=t_0} = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0)$. $\square$

Теорема 5. (Производная обратной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0; пусть существует $f'(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$, причем она дифференцируема в точке y_0 и*

$$\left(f^{-1}(y)\right)'\Big|_{y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Обратная функция $x = f^{-1}(y)$ определена, строго монотонна и непрерывна в окрестности точки y_0 по теореме об обратной функции. Пусть приращение ее аргумента $\Delta y \neq 0$; тогда приращение функции $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$ также отлично от нуля (в силу строгой монотонности обратной функции). Значит, можем утверждать, что $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{(\Delta y)/(\Delta x)}$. Кроме того, так как $x_0 = f^{-1}(y_0)$,

$$x_0 + \Delta x = f^{-1}(y_0) + \Delta x = f^{-1}(y_0) + f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0 + \Delta y),$$

то

$$f(x_0+\Delta x) = f(f^{-1}(y_0+\Delta y)) = y_0+\Delta y.$$

Значит, $f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = y_0+\Delta y - f(f^{-1}(y_0)) = \Delta y$, то есть выражение Δy действительно есть приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx. Заметим также, что $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$, поскольку функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0. Следовательно,

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{(\Delta y)/(\Delta x)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\Delta y)/(\Delta x)} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta y/\Delta x)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Это и означает дифференцируемость обратной функции. □

Теорема 6. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функции $u(x)\pm v(x)$, $u(x)\cdot v(x)$ и $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (если $v(x_0)\neq 0$) также дифференцируемы в точке x_0, причем*

$$(u(x)\pm v(x))'\Big|_{x_0} = u'(x_0)\pm v'(x_0);$$

$$(u(x)\cdot v(x))'\Big|_{x_0} = u'(x_0)\cdot v(x_0) + u(x_0)\cdot v'(x_0);$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\Big|_{x_0} = \frac{u'(x_0)\cdot v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Доказательство. 1) Обозначим $y(x) = u(x)\pm v(x)$, $\Delta u = u(x_0+\Delta x) - u(x_0)$, $\Delta v = v(x_0+\Delta x) - v(x_0)$, $\Delta y = y(x_0+\Delta x) - y(x_0)$. Тогда

$$\Delta y = (u(x_0+\Delta x)\pm v(x_0+\Delta x)) - (u(x_0)\pm v(x_0)) =$$

$$= (u(x_0+\Delta x) - u(x_0)) \pm (v(x_0+\Delta x) - v(x_0)) = \Delta u \pm \Delta v.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u'(x_0)\pm v'(x_0).$$

2) Пусть теперь $y(x) = u(x)\cdot v(x)$. Тогда

$$\Delta y = (u(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0+\Delta x)) - (u(x_0)\cdot v(x_0)) =$$

$$= u(x_0+\Delta x)(v(x_0+\Delta x) - v(x_0)) + v(x_0)(u(x_0+\Delta x) - u(x_0)) = u(x_0+\Delta x)\Delta v + v(x_0)\Delta u.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} u(x_0+\Delta x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} = u(x_0)v'(x_0) + v(x_0)u'(x_0).$$

Мы воспользовались тем фактом, что функция $u(x)$ дифференцируема в точке x_0, следовательно, непрерывна в этой точке и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} u(x_0+\Delta x) = u(x_0)$.

3) Наконец, обозначим $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Так как функция $v(x)$ непрерывна в точке x_0 и $v(x_0) \neq 0$, то существует вещественное $\delta > 0$ такое, что $v(x) \neq 0$, если $x \in B_\delta(x_0)$. Пусть $|\Delta x| < \delta$. Тогда

$$\Delta y = \frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0) - v(x_0 + \Delta x)u(x_0)}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} =$$

$$= \frac{v(x_0)(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) - u(x_0)(v(x_0 + \Delta x) - v(x_0))}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \frac{v(x_0)\Delta u - u(x_0)\Delta v}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Мы снова воспользовались непрерывностью функции $v(x)$ в точке x_0, откуда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x_0 + \Delta x) = v(x_0)$. □

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0$, так как $\Delta C \equiv 0$ в любой точке.

2)

$$(e^x)'|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to \Delta 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = e^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0}$$

(воспользовались следствием второго замечательного предела).

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

3)

$$(\log_a x)' = \{y = \log_a x\} = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0$$

(воспользовались теоремой о производной обратной функции). В частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

4)

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad x \neq 0.$$

5)

$$(\sin x)'|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \cos x_0 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x_0$$

(использовали первый замечательный предел).

6)

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

7)

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

8)

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

9)

$$(\arcsin x)' = \{y = \arcsin x\} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Здесь мы снова применили теорему о производной обратной функции. Перед корнем выбран знак " + ", поскольку функция $\arcsin x$ при $-1 < x < 1$ принимает значения на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, следовательно, $\cos(\arcsin x) > 0$.

Упражнение 1. *Доказать, что для функции* $f(x) = \arcsin x$ *выполнено:* $f'_\Lambda(1) = f'_\Pi(-1) = +\infty$.

10)

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

11)

$$(\operatorname{arctg} x)' = \{y = \operatorname{arctg} x\} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

(теорема о производной обратной функции).

12)

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

13)

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

14)

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

15)

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

(воспользовались основным тождеством для гиперболических функций: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x \equiv 1$).

16)

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$$

17)

$$(\operatorname{arsh} x)' = \{y = \operatorname{arsh} x\} = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

18)

$$(\operatorname{arch} x)' = (\ln(x+\sqrt{x^2-1}))' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}(x+\sqrt{x^2-1})' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1.$$

19)

$$(\operatorname{arth} x)' = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1.$$

20)

$$(\operatorname{arcth} x)' = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1.$$

Дифференциал функции.

Определение 6. *Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению Δx, называется выражение $dy = f'(x_0)\Delta x$.*

Замечание 2. *1) Если точка x_0 фиксирована, то дифференциал dy — главная линейная часть приращения функции Δy — является линейной функцией аргумента Δx (если $f'(x_0) = 0$, то $dy \equiv 0$).*

2) Вообще говоря, $dy \neq \Delta y$. Действительно, рассмотрим график функции $y = f(x)$. Отметим на нем точки $M(x_0, f(x_0))$ и $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Обозначим также через H и P точки на координатной плоскости с координатами $H(x_0 + \Delta x, f(x_0))$; $P(x_0 + \Delta x, f'(x_0)\Delta x + f(x_0))$. Тогда точки N, P, H лежат на одной прямой; $MH \perp NH$. Получаем, что $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = NH$; $dy = f'(x_0)\Delta x = PH$. Итак, $dy \neq \Delta y$ в общем случае; кроме того, мы выяснили геометрический смысл дифференциала: дифференциал dy — приращение касательной, соответствующее приращению аргумента Δx.

3) Если x — независимая переменная, то $dx = x'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Вообще, как видно и из геометрического смысла дифференциала, если $y = f(x)$ — линейная функция, то $dy = \Delta y$.

Утверждение 3. (Инвариантность формы первого дифференциала). *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда ее первый дифференциал имеет вид: $dy = f'(x_0)dx$, независимо от того, является ли x независимой переменной или функцией некоторого аргумента t.*

Доказательство. Пусть сначала x — независимая переменная. Тогда

$$dy = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$$

.

Если $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, такой, что $x_0 = \varphi(t_0)$, то (по теореме о дифференцируемости сложной функции)

$$dy = (f(\varphi(t))'|_{t_0}\Delta t = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0)\Delta t = f'(x_0)dx,$$

так как по определению дифференциал функции $x = \varphi(t)$ в точке t_0 имеет вид: $dx = \varphi'(t_0)\Delta t$. □

Замечание 3. *Так как для дифференцируемой функции $y = f(x)$ всегда $dy = f'(x)dx$, то выражение $\dfrac{dy}{dx}$ — не просто обозначение для производной; оно имеет смысл: это отношение двух дифференциалов.*

Применение дифференциала для приближенных вычислений.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Так как ее приращение $\Delta f = df + \bar{o}(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta f - df}{\Delta x} = \bar{o}(1)$ при $\Delta x \to 0$.

Определение 7. *Число $\dfrac{\Delta f - df}{\Delta x}$ называется* **относительной погрешностью** *приближенного равенства*

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Пример 2. *Вычислим приближенно $\sqrt[4]{1,02}$. Обозначим $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,02$. Тогда*

$$\sqrt[4]{1,02} = f(x_0 + \Delta x) \approx \sqrt[4]{1} + (\sqrt[4]{x})'|_{x=1} \cdot 0,02 = 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,02 = 1 + 0,005 = 1,005.$$

Сделаем проверку: $1,005^2 = 1,010025$; $1,010025^2 = 1,020150500625$. *Видим, что мы получили ошибку в четвертом знаке.*

Заметим, что мы пока не можем оценить точность приближенных вычислений, поскольку не обладаем соответствующим математическим аппаратом. Несколько позже, изучив формулу Тейлора, мы сможем не только вычислять значения функций в точке с любой точностью, но и оценивать погрешность наших приближенных вычислений.

Производные и дифференциалы высших порядков. Дифференцирование параметрически заданной функции.

Определение 8. *Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на интервале (a, b). Если функция $f'(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$, то число $(f'(x))'|_{x_0}$ называют* **второй производной (производной второго порядка)** *функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$ ($y''|_{x_0}$, $y^{(2)}|_{x_0}$, $\left.\dfrac{d^2f}{dx^2}\right|_{x_0}$, ...).*

Аналогично, если функция $f^{(n-1)}(x)$ ($n = 2, 3, \ldots$) дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, то число $(f^{(n-1)}(x))'|_{x_0}$ называют **$n-$ной производной (производной $n-$ого порядка)** *функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f^{(n)}(x_0)$ ($y^{(n)}|_{x_0}$, $\left.\dfrac{d^nf}{dx^n}\right|_{x_0}$, ...).*

Замечание 4. *1) Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $n-$ого порядка в любой точке множества A, то говорят, что $f(x)$ n* **раз дифференцируема** *на множестве A.*

2) Принято считать, что $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Производные высших порядков некоторых элементарных функций.

1) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$, $x > 0$.

Доказательство (индукция по n). При $n = 1$: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ — верно. Пусть $(x^\alpha)^{(n-1)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)x^{\alpha-n+1}$; тогда

$$(x^\alpha)^{(n)} = ((x^\alpha)^{(n-1)})' = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

В частности, если $\alpha = m \in \mathbb{N}$, то

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, & m \geqslant n \\ 0, & m < n. \end{cases}$$

2) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$; $(e^x)^{(n)} = e^x$.

Доказательство (индукция по n). При $n = 1$: $(a^x)' = a^x \ln a$ — верно. Пусть $(a^x)^{(n-1)} = a^x \ln^{n-1} a$; тогда $(a^x)^{(n)} = (a^x)' \ln^{n-1} a = a^x \ln^n a$.

3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$; $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$

Доказательство (индукция по n). При $n = 1$: $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ — верно. Пусть $(\sin x)^{(n-1)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi(n-1)}{2}\right)$, тогда

$$(\sin x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Для $\cos x$ — аналогично.

4) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$, $x > 0$.

Доказательство (индукция по n). При $n = 1$: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} = \dfrac{(-1)^0 0!}{x^1}$ — верно. Пусть $(\ln x)^{(n-1)} = (-1)^{n-2}\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}$; тогда

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-2}(n-2)!\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)' = \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!(-n+1)}{x^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

5) $(\operatorname{arctg} x)^{(n)} = \dfrac{(n-1)!}{(x^2+1)^{n/2}}\sin\left(n\left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

Доказательство. Обозначим $y = \operatorname{arctg} x$, тогда $\dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \cos^2 y$. Покажем, что $y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin\left(n\left(y + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ (индукция по n). При $n = 1$:

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1} = \cos^2 y = 0!\cos y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{— верно.}$$

Пусть $y^{(n-1)} = (n-2)!\cos^{n-1} y \cdot \sin\left((n-1)\left(y + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, тогда

$$y^{(n)} = (n-2)!\left(\cos^{n-1} y \cdot \sin\left((n-1)\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)' =$$

$$= (n-2)!\left((n-1)\cos^{n-2} y(-\sin y)\sin\left((n-1)\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \cos^{n-1} y \cos\left((n-1)\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right)(n-1)\right) y'_x =$$

$$= (n-1)!\left(-\cos^{n-2} y \cdot \sin y \cdot \sin\left((n-1)\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \cos^{n-1} y \cdot \cos\left((n-1)\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\frac{1}{x^2+1} =$$

$$= (n-1)!\cos^{n-2} y \cdot \cos\left(y + (n-1)\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} =$$

$$= (n-1)!\cos^n y \cdot \cos\left(n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin\left(n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Теорема 7. (Формула Лейбница). *Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ n раз дифференцируемы в точке x_0. Тогда функция $u(x) \cdot v(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0, причем*

$$(u(x) \cdot v(x))^{(n)}|_{x_0} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x_0) v^{(k)}(x_0).$$

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции (по n). При $n = 1$:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = C_1^0 u^{(1)}(x)v^{(0)}(x) + C_1^1 u^{(0)}(x)v^{(1)}(x) \text{ — верно.}$$

Пусть
$$(u(x)\cdot v(x))^{(n-1)}|_{x_0}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k u^{(n-1-k)}(x_0)v^{(k)}(x_0).$$
Тогда
$$(u(x)\cdot v(x))^{(n)}=(C_{n-1}^0u^{(n-1)}(x)v(x)+C_{n-1}^1u^{(n-2)}(x)v'(x)+\dots+C_{n-1}^{n-1}u(x)v^{(n-1)}(x))'=$$
$$=C_{n-1}^0u^{(n)}(x)v(x)+C_{n-1}^0u^{(n-1)}(x)v'(x)+C_{n-1}^1u^{(n-1)}(x)v'(x)+C_{n-1}^1u^{(n-2)}(x)v''(x)+$$
$$+C_{n-1}^2u^{(n-2)}(x)v''(x)+\dots+C_{n-1}^{n-1}u'(x)v^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^{n-1}u(x)v^{(n)}(x)=$$
$$=C_n^0u^{(n)}(x)v(x)+(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1)u^{(n-1)}(x)v'(x)+(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2)u^{(n-2)}(x)v''(x)+\dots+C_n^nu(x)v^{(n)}(x)=$$
$$=C_n^0u^{(n)}(x)v(x)+C_n^1u^{(n-1)}(x)v'(x)+C_n^2u^{(n-2)}(x)v''(x)+\dots+C_n^nu(x)v^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x).$$
□

Определение 9. *Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Зафиксируем приращение аргумента $\Delta x=h$. Тогда $dy=f'(x)h$ — функция аргумента x. Если она дифференциркема в некоторой точке $x_0\in(a,b)$, то ее дифференциал в точке x_0 имеет вид: $d(f'(x)h)|_{x_0}=f''(x_0)h\Delta x$. Если выбрать приращение $\Delta x=h$, то полученное выражение $d(dy))|_{x_0}=f''(x_0)h^2=f''(x_0)dx^2$ называется **вторым дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента dx, и обозначается $d^2y_{x_0}$ или $d^2f(x)|_{x_0}$.*

*Аналогично **n-ым дифференциалом (дифференциалом n-ого порядка)** функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента dx, называется выражение*
$$d^nf(x)|_{x_0}=d(d^{n-1}f(x))|_{x_0}=f^{(n)}(x_0)dx^n.$$

Замечание 5. *При $n\geqslant 2$ $n-$ый дифференциал уже не обладает, вообще говоря, свойством инвариантности: пусть $x=\varphi(t)$. Тогда*
$$d^2f(x)=d(df(x))=d(f'(x)\varphi'(t)dt)=(f'(x)\varphi'(t)dt)'dt=f''(x)\varphi'(t)\varphi'(t)dt^2+f'(x)\varphi''(t)dt^2=$$
$$=f''(x)(\varphi'(t)dt)^2+f'(x)(\varphi''(t)dt^2)=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x.$$
Если x — независимая переменная (или линейная функция), то $d^nx=0$, $n=2,3,\dots$.

Определение 10. *Говорят, что функция $y=f(x)$ **задана параметрически** на множестве X, если на некотором множестве T заданы функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$, причем функция $\varphi(t)$ имеет своим множеством значений X И на этом множестве определена обратная функция $t=\varphi^{-1}(x)$. Тогда для любого $x\in X$: $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$.*

Пример 3. $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t\in[0,\pi]$. *Тогда* $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$.

Теорема 8. *Если функция $y=f(x)$ задана параметрически: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, причем функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ дважды дифференцируемы в точке t_0 и $\varphi'(t_0)\neq 0$, то функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x_0=\varphi(t_0)$ и*
$$y'|_{x_0}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)},\quad y''(x)|_{x_0}=\frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0)-\varphi''(t_0)\psi'(t_0)}{(\varphi'(t_0))^3}.$$

Доказательство.

$$y'(x)|_{x_0} = \frac{dy|_{t_0}}{dx|_{t_0}} = \frac{\psi'(t_0)dt}{\varphi'(t_0)dt} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)};$$

$$y''(x_0)|_{x_0} = \frac{d(y'(x))|_{t_0}}{dx|_{t_0}} = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'\Big|_{t_0} dt}{\varphi'(t_0)dt} = \frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)}{(\varphi'(t_0))^3}.$$

□